

11. cvičení - řešení

22. 12. 2022

Příklad 1 (a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{22x^6 + 20x - 42}{x^{40} - 3x + 2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{132x^5 + 20}{40x^{39} - 3} = \frac{152}{37}$$

Příklad 1 (b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

Příklad 1 (c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2x \sin x + x^2 \cos x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

Kde v rovnosti s VOAL jsme vyřešili první zlomek pomocí známé limity a druhý zlomek opět pomocí L'H:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x + x \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}$$

Příklad 1 (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotan(x) - 1}{x^2}$$

Vyšetřeme nejdříve limitu čitatele a jmenovatele zvlášť, abychom věděli, zda můžeme použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cotan(x) - 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cos x - 1 \stackrel{\text{ZL} + \text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} 1 \cdot 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 &\stackrel{\text{spoj.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Je splněna podmínka (i) z l'Hospitala, pokud $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cotan x - 1)'}{(x^2)'}$ existuje, pak jsou splněny předpoklady l'Hospitala a zmíněná limita se bude rovnat zadané.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotan(x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cotan x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotan x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x}$$

V poslední limitě zřejmě vychází $\frac{0}{0}$. Zkusme tedy opět použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x \sin x - x)'}{(2x \sin^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{2 \sin^2 x + 4x \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x (\sin x + 2x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x}\end{aligned}$$

V poslední limitě zřejmě vychází $\frac{0}{0}$. Zkusme tedy opět použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(\sin x + 2x \cos x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{-1}{1 + 2 - 0} = \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 1 (e)

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \log(x) \cdot \log(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\log(1-x)}{\frac{1}{\log(x)}}$$

Dále platí.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \left| \frac{1}{\log(x)} \right| = \infty$$

Zkusme použít l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \log(x) \cdot \log(1-x) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(\log(1-x))'}{\left(\frac{1}{\log(x)}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)^{-1} \cdot (-1)}{-\frac{1}{x \cdot \log^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x \cdot \log^2(x)}{1-x}$$

Poslední limita vychází $\frac{0}{0}$. Použijme l'Hospitala.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x \cdot \log^2(x)}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x \cdot \log^2(x))'}{(1-x)'} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\log^2(x) + 2 \log(x)}{-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} -\log^2(x) - 2 \log(x) = 0\end{aligned}$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 1 (f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$$

Zřejmě vychází $\frac{0}{0}$, použijme tedy l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin 2x - 2 \arcsin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

Poslední limita vychází $\frac{0}{0}$. Použijme l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}} - \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8}{\sqrt{(1-4x^2)^3}} - \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6} \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} 1$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 2 (a)

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x$$

Postupujeme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.

1. definiční obor a spojitost

Funkce je definována na celém definičním oboru a je spojitá, neboť je součtem spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodičita

Funkce f je 2π -periodická, neboť je součtem funkce $\sin x$ (perioda 2π) a $\cos^2 x$ (perioda π). Není ani sudá, ani lichá, neboť

$$f(-x) = \sin -x + \cos^2(-x) = -\sin x + \cos^2(x) \neq \pm f(x).$$

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

Vzhledem k periodičnosti funkce nemá smysl vyšetřovat limity v $\pm\infty$. Jiné krajní body nemáme.

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

Spočteme první derivaci

$$f'(x) = \cos x - 2 \cos x \sin x = \cos x(1 - 2 \sin x),$$

Derivace je

- nulová v bodech $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ a $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$,
- kladná na $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$,
- a záporná na $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

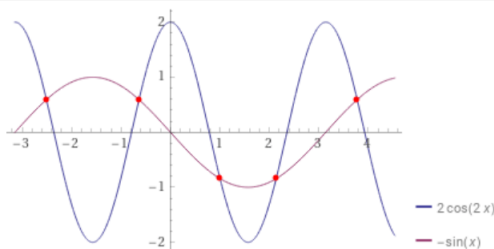
Funkce f je tedy rostoucí na $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$ a klesající na $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, kde $k \in \mathbb{Z}$

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

Spočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -\sin x - 2 \cos^2 x + x \sin^2 x = -2 \cos(2x) - \sin x,$$

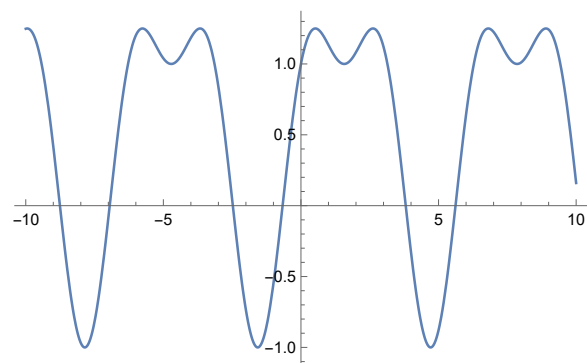
Tedy pro nalezení inflexních bodů hledáme x taková, že $2 \cos(2x) = -\sin x$. Z grafu vidíme, že k tomu dochází zhruba v bodech $-2, 5 + 2k\pi$, $-0, 63 + 2k\pi$, $1 + 2k\pi$ a $2, 1 + 2k\pi$.



6. asymptoty

Funkce nemá žádné asymptoty.

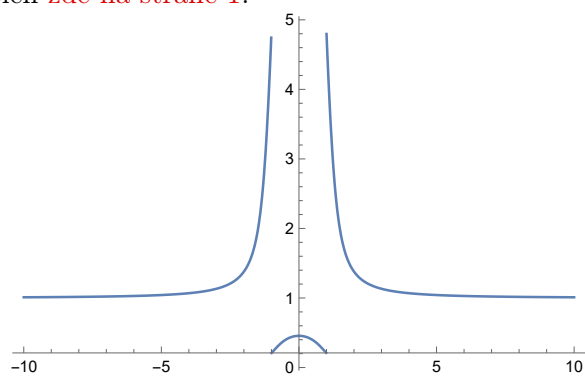
7. graf



Příklad 2 (b)

$$f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x^2-1}}$$

Postup řešení je vysvětlen [zde na straně 1](#).



Příklad 2 (c)

$$f(x) = e^{-x^2+3x-7}$$

Postupujeme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.

1. definiční obor a spojitost

Funkce je definována na celé reálné ose, neboť se jedná o složení exponenciály a polynomu. Funkce je spojitá na celém definičním oboru, což opět plyne z toho, že se jedná o složení spojitých funkcí. Rovněž díky oboru hodnot exponenciály víme, že $f \geq 0$

2. lichost, sudost, periodicita

Funkce není ani sudá ani lichá, neboť

$$f(-x) = e^{-(-x)^2+3(-x)-7} = e^{-x^2-3x-7} \neq \pm f(x).$$

Zřejmě se nejedná ani o periodickou funkci.

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

Zajímají nás limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2+3x-7} \stackrel{\text{spoj. exp}}{=} 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+3x-7} \stackrel{\text{spoj. exp}}{=} 0.$$

Tedy funkce v obou krajních bodech definičního oboru konverguje k nule.

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2x + 3)$$

Derivace je nulová právě tehdy, když $-2x + 3 = 0$. Tedy pro $x = \frac{3}{2}$. Na intervalu $(-\infty, \frac{3}{2})$ je derivace kladná a funkce f rostoucí. Na intervalu $(\frac{3}{2}, \infty)$ je derivace záporná a funkce f klesající.

Potom tedy $f(\frac{3}{2}) = e^{\frac{-19}{4}}$ je globální maximum.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

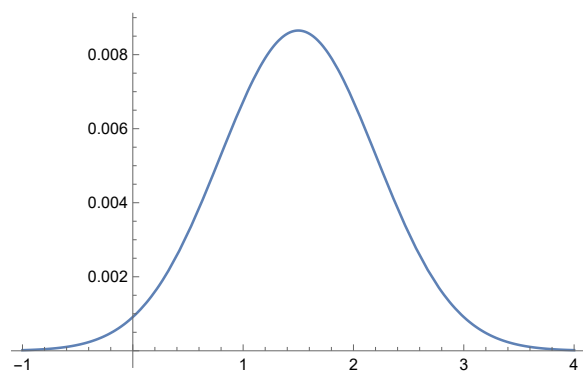
$$f''(x) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2x + 3)^2 + e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (4x^2 - 12x + 7).$$

Druhá derivace je nulová právě tehdy, když $4x^2 - 12x + 7 = 0$. Tedy pro $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Na intervalech $(-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ je druhá derivace kladná a funkce f konvexní. Na intervalu $(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$ je druhá derivace záporná a funkce f konkávní.

6. asymptoty

Má smysl uvažovat asymptoty v $\pm\infty$. Jelikož je f na intervalu $(\frac{3}{2}, \infty)$ klesající a kladná, je asymptotou v nekonečnu zřejmě osa x . Pro $-\infty$ argumentujeme stejně.

7. graf



Příklad 2 (d)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 1}}$$

Postupujeme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.

1. definiční obor a spojitost

$f(x)$ je definováno $\iff x^3 + 1 \geq 0 \iff x^3 \geq -1 \iff x \geq -1$

$D(f) = [-1, \infty)$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicitá

Jelikož nemá funkce definiční obor symetrický kolem nuly, tak nemůže jít o funkci, která by byla sudá nebo lichá. Navíc zřejmě není ani periodická.

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 1}} \stackrel{\text{VoAL} \pm \text{spoj.}}{=} \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1+} (x^3 + 1)}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 1}} \right)' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} \cdot (2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

Kladnost f' je dána kladností výrazu $\sqrt{x^3 + 1} \cdot (2 - x^3)$.

$f' > 0 \iff \sqrt{x^3 + 1} \cdot (2 - x^3) > 0 \iff x \in (-1, \sqrt[3]{2})$.

Tedy f je na $(-1, \sqrt[3]{2})$ rostoucí a na $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ klesající.

V bodě $x = \sqrt[3]{2}$ má nulovou první derivaci a jelikož nalevo od tohoto bodu roste a napravo klesá, nabývá f v bodě $\sqrt[3]{2}$ svého lokálního maxima. Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{3}} \right]$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2} \frac{2 - x^3}{(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \frac{3x^2(x^3 - 8)}{4(x^3 + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f'' > 0 \iff (x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) > 0 \iff x - 2 > 0 \iff x \in (2, \infty)$$

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 2)$ konkávní a na intervalu $(2, \infty)$ konvexní.

6. asymptoty

Má smysl uvažovat jen asymptotu v ∞ , neb na okolí $-\infty$ není f definována. Jelikož je f na intervalu $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ klesající a v bodě $\sqrt[3]{2}$ nabývá hodnoty kladé hodnoty, je asymptotou v nekonečnu zřejmě osa x .

7. graf

$$D(f) = [-1, \infty)$$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

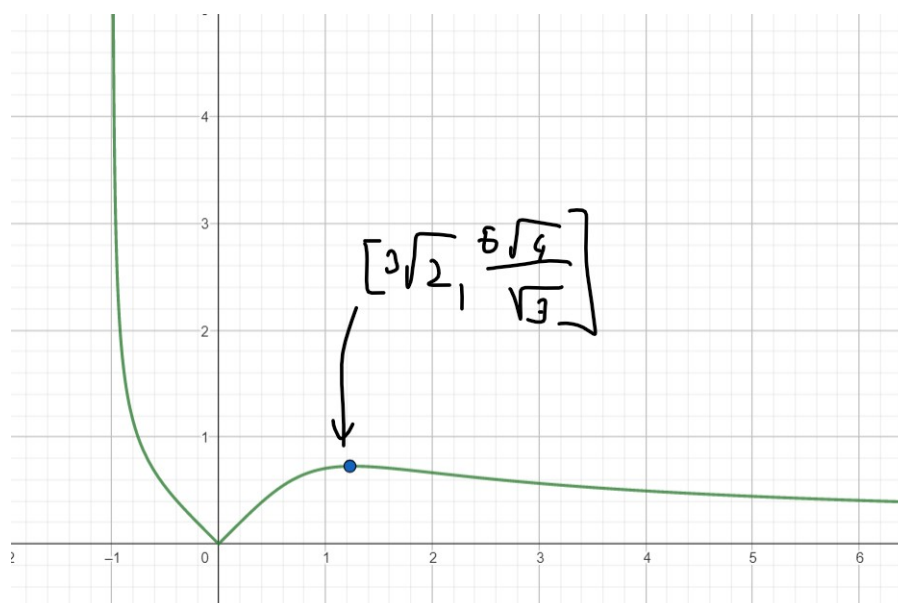
$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Tedy f je na $(-1, \sqrt[3]{2})$ rostoucí a na $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ klesající.

Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt{3}}\right]$.

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 2)$ konkávní a na intervalu $(2, \infty)$ konvexní.



Příklad 2 (e)

$$f(x) = \arccos(\cos^2 x)$$

Postupujeme podle návodu uvedeném v teorii ke cvičení 11.

1. definiční obor a spojitost

$$D(f) = \mathbb{R}$$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita

Funkce $\cos$ je sudá, tedy i f je sudá.

Funkce $\cos^2$ je π -periodická, proto je i f π -periodická. Stačí tedy funkci f zkoumat na intervalu $[0, \pi]$ a zbytek grafu plyne z periodicity.

Věnujme se tedy funkci f jen na intervalu $[0, \pi]$

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \arccos(\cos^2 x) \stackrel{\text{spoj.}}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} \arccos(\cos^2 x) \stackrel{\text{spoj.}}{=} 0$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = (\arccos(\cos^2 x))' = \frac{2 \cos x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$$

$$f' > 0 \iff \cos x \sin x > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

f je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ klesající.

Lokálního maxima nabývá v bodě $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \left(\frac{2 \cos x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} \right)'$$

Derivujeme jako podíl dvou funkcí - tj. dle pravidla: $\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h' \cdot g - h \cdot g'}{g^2}$. Zde je $h(x) = 2 \cos x \sin x$ a $g(x) = \sqrt{1 - \cos^4 x}$.

$$h'(x) = 2(-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (\text{derivace součinu})$$

$$g'(x) = \left((1 - \cos^4 x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos^4 x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-4 \cos^3 x \sin x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos^4 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cos^3 x \sin x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - \cos^4 x}} \cdot (-4 \cos^3 x \sin x) = \frac{-4 \cos^3 x \sin x}{2\sqrt{1 - \cos^4 x}} = \frac{-2 \cos^3 x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}$$

Pak tedy platí následující.

$$f''(x) = \frac{h' \cdot g - h \cdot g'}{g^2} = \frac{(2(\cos^2 x - \sin^2 x)) \cdot \sqrt{1 - \cos^4 x} - 2 \cos x \sin x \cdot \left(\frac{2 \cos^3 x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} \right)}{(\sqrt{1 - \cos^4 x})^2} =$$

$$= \frac{(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x)(1 - \cos^4 x) - 4 \cos^4 x \sin^2 x}{(1 - \cos^4 x) \cdot \sqrt{1 - \cos^4 x}}$$

Zřejmě $1 - \cos^4 x \geq 0$, proto kladnost f' závisí na výrazu $(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x)(1 - \cos^4 x) - 4 \cos^4 x \sin^2 x$.

$$(2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x)(1 - \cos^4 x) - 4 \cos^4 x \sin^2 x = 2(\cos^2 x - \cos^6 x - \sin^2 x - \cos^4 x \sin^2 x)$$

$$f'' > 0 \iff \cos^2 x - \cos^6 x - \sin^2 x - \cos^4 x \sin^2 x > 0$$

$$\iff \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^4 x(-\sin^2 x - \cos^2 x) > 0 \iff -(\cos^2 x - 1)^2 > 0$$

Poslední nerovnost neplatí nikde, tedy $f'' < 0$ na $(0, \pi)$.

6. asymptoty

Nemá smysl řešit asymptoty, vzhledem k tomu, že f je periodická.

7. graf

$$D(f) = \mathbb{R}$$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

f je π -periodická.

Na $(0, \pi)$ platí následující.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$$

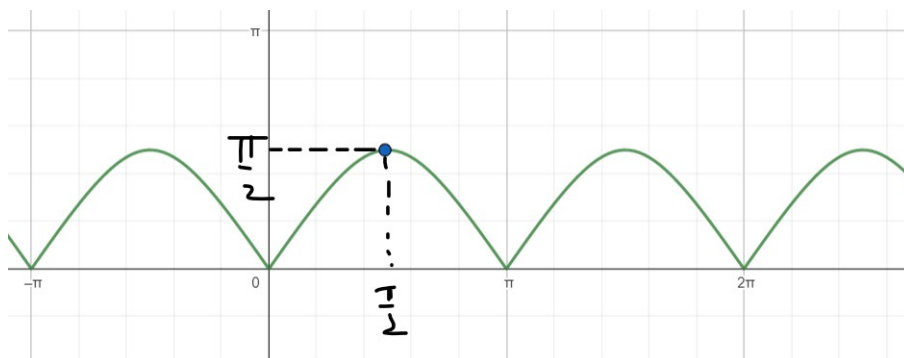
$$\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = 0$$

f je na $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí a na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ klesající.

Lokálního maxima nabývá v bodě $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

f je na $(0, \pi)$ konkávní.

Aplikujeme-li i periodicitu, dostáváme následující graf.



Příklad 2 (f)

$$f(x) = \arccos \frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}$$

Postup řešení je vysvětlen [zde na straně 5](#).